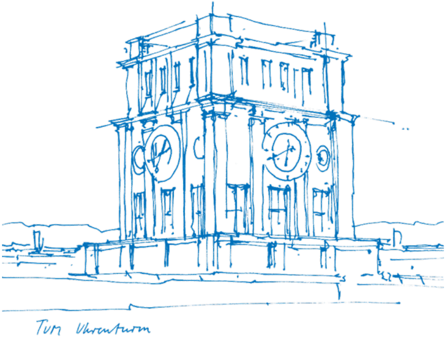
Einführung in die Theoretische Informatik

Tutorium – Woche 1

Esther Ney

Sommersemester 2025



Organisatorisches

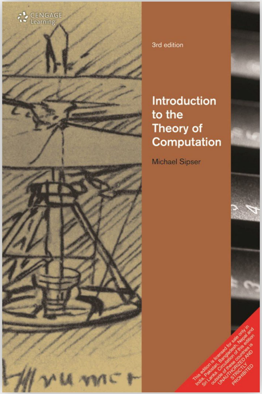
Zulip

Für die diesjährige THEO-Vorlesung wurden **inoffizielle** Streams auf der ZULIP-Instanz der TUM INFORMATIK erstellt. Dieser wird von den meisten Tutor*innen, aber nicht von PROF. ALBERS gelesen; wir versuchen natürlich trotzdem, organisatorische Fragen bei Bedarf weiterzuleiten. Man kann mich dort auch in Direktnachrichten anschreiben.

- Tutorin: ESTHER NEY
- Tutorien: Dienstag 16-18 (Di-16-2) und Donnerstag 16-18 (Do-16-1)
- E-Mail: `esther.ney@tum.de`
- Aufbau einer Tutorstunde: kurze Wiederholung wichtiger Definitionen und Lemmata, dann selbständiges Bearbeiten der Aufgaben
- Folien: werden vsl. ab nächster Woche auf meiner Website hochgeladen

Literaturempfehlungen

Uwe Schöning – Theoretische Informatik kurz gefasst



Michael Sipser – Introduction to the Theory of Computation

Disclaimer

Diese Folien sind keine offizielle Musterlösung und dienen lediglich als zusätzliches Material für die Nachbereitung der Tutorien.
Tutorienlösungen können fehlerhaft sein.
Im Zweifel gilt immer das, was in den offiziellen Vorlesungsfolien und in der Musterlösung steht.

Die Folien sind nur für die Teilnehmer der entsprechenden Tutorien gedacht und dürfen nicht ohne die ausdrückliche Erlaubnis der Urheber vervielfältigt oder weitergegeben werden.

Wichtige Lemmata / Definitionen – Alphabete und Sprachen

Definition 2.1 – Grundbegriffe

Ein ALPHABET Σ ist eine endliche Menge. Die MENGE DER WÖRTER über dem Alphabet Σ wird mit Σ^* bezeichnet. Ein WORT über Σ ist eine endliche Folge aus Zeichen, oder kurz: ein Element von Σ^*.

Eine SPRACHE über dem Alphabet Σ ist eine beliebige Teilmenge von Σ^*.

Es gibt mehrere OPERATIONEN AUF SPRACHEN:

$$AB := \{vw \mid v \in A \wedge w \in B\}$$

$$A^n := A \; n\text{-malig mit sich selbst konkateniert}$$

$$A^0 := \varepsilon \text{ und } A^1 := A$$

$$A^* := \cup_{n \in \mathbb{N}} A^n$$

$$A^+ := AA^*$$

Intuitiv: Sprachen sind eine Menge an Wörtern. Wörter sind beliebig lange Ketten an Buchstaben aus einem Alphabet.

Wichtige Lemmata / Definitionen – Grammatiken

Definition 2.7 – Grammatik

Eine GRAMMATIK ist ein Tupel (V, Σ, P, S) mit NICHTTERMINALEN V, TERMINALEN (oder dem ALPHABET) Σ, PRODUKTIONEN $P \subseteq (V \times \Sigma)^+ \to (V \times \Sigma)^*$ und STARTSYMBOL $S \in V$.

Definition 2.12 – Reflexive transitive Hülle

Es gilt $\alpha \to_G^* \beta$ genau dann wenn $\exists n. \alpha \to_G^n \beta$.
Damit ist dann die SPRACHE EINER GRAMMATIK $L(G) \equiv \{w \in \Sigma^* \mid S \to_G^* w\}$.

Intuitiv: Wörter in der Sprache einer Grammatik sind genau die Wörter, die sich vom Startsymbol S mit den Produktionen P ableiten lassen, ohne dass ein Nichtterminal übrig stehen bleibt.

NICHTTERMINALE sind temporäre Symbole, TERMINALE sind “Buchstaben” aus dem Alphabet.

Wichtige Lemmata / Definitionen – Typen von Sprachen

Definition – Chomsky-Hierarchie

Eine Grammatik G ist immer vom TYP 0.

Eine Grammatik G ist vom TYP 1, wenn für jede Produktion $\alpha \to \beta$ gilt, dass $|\alpha| \leq |\beta|$. AUSNAHME: falls $S \to \varepsilon$ eine Produktion ist, muss auch $S \notin \beta$ gelten.

Eine Grammatik G vom Typ 1 ist in TYP 2, wenn für jede Produktion $\alpha \to \beta$ gilt, dass α genau ein Nichtterminal ist. Also haben alle Produktionen die Form $V \to (\Sigma \cup V)^*$.

Eine Grammatik G vom Typ 2 ist vom TYP 3, wenn β entweder ein Terminal oder ein Terminal gefolgt von einem Nichtterminal ist, d.h. $\beta \in \Sigma \cup \Sigma V$. Also haben alle Produktionen die Form $V \to Wa$ oder $V \to b$. AUSNAHME: $S \to \varepsilon$ ist auch erlaubt.

Intuitiv: Grammatiken vom Typ 2 sind MÄCHTIGER als Grammatiken vom Typ 3, d.h. es gibt Sprachen, die sich durch eine Grammatik vom Typ 2, aber nicht vom Typ 3 darstellen lassen. (Und Typ 1 ist mächtiger als Typ 2, und Typ 0 ist mächtiger als Typ 1.)

Vorbereitung

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe und Notationen korrekt definieren können.

- Alphabet Σ; Σ^*
- Wort w; $|w|$; ϵ; w^n
- formale Sprache A; AA; A^*; A^+
- reflexive transitive Hülle
- Grammatik G; $L(G)$
- Ableitungsrelation
- Chomsky-Hierarchie
- Wortproblem

Aufgabe T 1.1

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $W = \{aa, aaa, b\}$ eine Menge von Wörtern über Σ. Geben Sie, falls möglich, jeweils mindestens drei Wörter an, die innerhalb bzw. außerhalb der folgenden Sprachen liegen.

(a) $A := \{w \in W^* \mid |w| = 3\}$

(b) $B := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*.\exists v \in W.w = uv\}$

(c) $C := \{w \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N}_0.|w|_a = n \cdot |w|_b\}$
Hinweis: Mit $|w|_a$ bezeichnen wir die Anzahl der as in w.

(d) $D := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*.uw = w^2u\}$

(e) $E := \{(ba^nb)^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

(f) $F := \{w \mid w \in W^2 \wedge w \in W^3\}$

(g) $G := W\emptyset$

(h) $H := \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*.(u, v) \in W \times \emptyset^*\}$

Aufgabe T 1.1

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $W = \{aa, aaa, b\}$ eine Menge von Wörtern über Σ. Geben Sie, falls möglich, jeweils mindestens drei Wörter an, die innerhalb bzw. außerhalb der folgenden Sprachen liegen.

(a) $A := \{w \in W \mid |w| = 3\}$

(b) $B := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*. \exists v \in W. w = uv\}$

Aufgabe T 1.1

$W = \{aa, aaa, b\}$

(c) $C := \{w \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 . |w|_a = n \cdot |w|_b\}$
Hinweis: Mit $|w|_a$ bezeichnen wir die Anzahl der as in w.

(d) $D := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^* . uw = w^2 u\}$

Aufgabe T 1.1

$W = \{aa, aaa, b\}$

(e) $E := \{(ba^n b)^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

(f) $F := \{w \mid w \in W^2 \wedge w \in W^3\}$

Aufgabe T 1.1

$W = \{aa, aaa, b\}$

(g) $G := W\emptyset$

(h) $H := \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*.(u, v) \in W \times \emptyset^*\}$

Aufgabe T 1.2

Sei Σ ein Alphabet und $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ beliebig. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie für korrekte Aussagen einen Beweis an und widerlegen Sie falsche mithilfe eines geeigneten Gegenbeispiels. Zeigen Sie auch die Korrektheit Ihres Gegenbeispiels.

(a) $A^* = A^+$ genau dann wenn (gdw.) $\varepsilon \in A$

(b) $A(B \cap C) = AB \cap AC$

(c) Falls $A \subseteq B$, dann $A^n \subseteq B^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

(d) Unter der Annahme $A \neq \emptyset$ gilt: $A = AA$ gdw. $A = A^*$.

Aufgabe T 1.2

(a) $A^* = A^+$ genau dann wenn (gdw.) $\varepsilon \in A$

(b) $A(B \cap C) = AB \cap AC$

Aufgabe T 1.2

(c) Falls $A \subseteq B$, dann $A^n \subseteq B^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

(d) Unter der Annahme $A \neq \emptyset$ gilt: $A = AA$ gdw. $A = A^*$.

Aufgabe T 1.3

Bestimmen Sie für die beiden folgenden Sprachen eine passende Grammatik G, sodass $L(G)$ genau die Sprache ist.

(a) $A := \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$

(b) $B := \{ww : w \in \{a, b\}^*\}$ (schwierig)

Aufgabe T 1.3

Aufgabe T 1.4

Gegeben seien folgende drei Grammatiken $G_1 = (\{S, X\}, \Sigma, P_1, S)$, $G_2 = (\{S, X\}, \Sigma, P_2, S)$ und $G_3 = (\{S, S', A, B, C\}, \Sigma, P_3, S)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ mit folgenden Produktionen:

$$
\begin{array}{llll}
P_1: & S \to aX & X \to bS \mid b & \\
P_2: & S \to aSb \mid SX \mid \varepsilon & X \to cX & \\
P_3: & S \to S' \mid \varepsilon & S' \to ABC \mid ABCS' & \\
 & A \to a & B \to b & C \to c \\
 & CB \to BC & CA \to AC & BA \to AB
\end{array}
$$

Begründen Sie, warum die folgenden Wörter von den gegebenen Grammatiken erzeugt bzw. nicht erzeugt werden.

(a) $w_1 = abab \in L(G_1), w_2 = ba \notin L(G_1), w_3 = \varepsilon \notin L(G_1)$

(b) $u_1 = aabb \in L(G_2), u_2 = aabbcc \notin L(G_2)$

(c) $v_1 = aabbcc \in L(G_3), v_2 = aaabbc \notin (L(G_3)$

Aufgabe T 1.4

Aufgabe T 1.4

Aufgabe T 1.4

Altklausuraufgabe

Retake 2023 – Aufgabe 3a), 4 Punkte

Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und $N := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir betrachten die Sprache L der nichtleeren Wörter, die aus N hervorgehen, indem man HÖCHSTENS ein Zeichen austauscht. Formal definieren wir:

$$L := \{vxw \mid v, w \in \Sigma^* \land x \in \Sigma \land (\exists x' \in \Sigma.\, vx'w \in N)\}$$

Beispielsweise gilt $aaab \in L$ und $abab \notin L$. Außerdem betrachten wir die Grammatik G über Σ mit Startsymbol S und folgenden Produktionen:

$$S \to aSb \mid aTa \mid bTb$$
$$T \to aTb \mid \varepsilon$$

Gilt $L(G) = L$?

Altklausuraufgabe

Altklausuraufgabe