

Einführung in die Theoretische Informatik

Tutorium – Woche 8

Esther Ney

Sommersemester 2025

Zulip

Für die diesjährige THEO-Vorlesung wurden **inoffizielle** Streams auf der ZULIP-Instanz der TUM INFORMATIK erstellt. Dieser wird von den meisten Tutor*innen, aber nicht von PROF. ALBERS gelesen; wir versuchen natürlich trotzdem, organisatorische Fragen bei Bedarf weiterzuleiten. Man kann mich dort auch in Direktnachrichten anschreiben.

- Tutorin: ESTHER NEY
- Tutorien: Dienstag 16-18 (Di-16-2) und Donnerstag 16-18 (Do-16-1)
- E-Mail: esther.ney@tum.de
- Aufbau einer Tutorstunde: kurze Wiederholung wichtiger Definitionen und Lemmata, dann selbständiges Bearbeiten der Aufgaben
- Folien: auf ZULIP oder <https://reflect.moe/uni/theo25/>

Hinweis

Diese Folien sind keine offizielle Musterlösung und dienen lediglich als zusätzliches Material für die Nachbereitung der Tutorien.

Tutorienlösungen können fehlerhaft sein.

Im Zweifel gilt immer das, was in den offiziellen Vorlesungsfolien und in der Musterlösung steht.

Urheberrechtlicher Hinweis

Die Folien sind nur für die Teilnehmer der entsprechenden Tutorien gedacht und dürfen nicht ohne die ausdrückliche Erlaubnis der Urheber vervielfältigt oder weitergegeben werden. Das Urheberrecht zu den Aufgaben liegt bei den Aufgabenerstellern.

Satz 4.31 – Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen

Seien L, L_1, L_2 kontextfrei. Dann sind die folgenden Sprachen kontextfrei:

- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 L_2$
- L^*
- $L^R := \{w^R \mid w \in L\}$

Die folgenden Sprachen sind im Allgemeinen *nicht* kontextfrei:

- $L_1 \cap L_2$
- $\bar{L}$

nützlich, erzeugend, erreichbar

Definition vor Fakt 4.33 – erzeugend, nützlich, erreichbar

Sei $G := (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

Wir sagen, dass ein Symbol $X \in V \cup \Sigma$ *nützlich* ist, wenn es ein beliebiges Wort $w \in L(G)$ gibt, sodass es eine Ableitung $S \rightarrow_G^* w$ gibt, in der X vorkommt.

Wir sagen, dass ein Symbol $X \in V \cup \Sigma$ *erzeugend* ist, wenn es ein beliebiges Wort $w \in L(G)$ gibt, sodass es eine Ableitung $X \rightarrow_G^* w$ gibt.

Wir sagen, dass ein Symbol $X \in V \cup \Sigma$ *erreichbar* ist, wenn es beliebige Wort $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ gibt, sodass es eine Ableitung $S \rightarrow_G^* \alpha X \beta$ gibt.

Fakt 4.33 – nützlich impliziert erzeugend und erreichbar

Sei X ein nützliches Symbol in einer Grammatik G . Dann ist X auch erzeugend und erreichbar in G .

Durch Entfernen aller Symbole, die (1) nicht erzeugend und (2) nicht erreichbar sind, entsteht eine äquivalente Grammatik, in der (3) alle Symbole nützlich sind.

Satz 4.43 – CYK-Algorithmus

Sei G eine kontextfreie Grammatik mit Startzustand S in CHOMSKY-Normalform und $w \in \Sigma^*$ ein Wort. Dann ist in $O(|w|^3)$ entscheidbar, ob $w \in L(G)$ gilt.

- (1) Bilde eine Tabelle mit den Feldern $F_{i,j}$ für $1 \leq i \leq j \leq |w|$.
- (2) Notiere alle Symbole X mit $X \rightarrow w_i$ in $F_{i,i}$.
- (3) Wenn es $X \rightarrow YZ$ mit $Y \in F_{i,j}$ und $Z \in F_{j+1,k}$ gibt, dann notiere X in $F_{i,k}$. Wiederhole diesen Schritt solange wie möglich.
- (4) Falls am Ende $S \in F_{1,|w|}$ gilt, so ist $w \in L(G)$.

Da wir in endlicher Zeit zu einer Grammatik G die CHOMSKY-Normalform berechnen können, ist das Wortproblem für eine beliebige kontextfreie Grammatik entscheidbar.

Vorbereitung

Überprüfen Sie, dass Sie mit den folgenden Begriffen vertraut sind.

- Abschlusseigenschaften für kontextfreie Sprachen
- nützliche, erzeugende, erreichbare Symbole
- CYK-Algorithmus

Aufgabe T8.1

Sei G die CFG mit Startzustand S und folgenden Produktionen:

$$S \rightarrow ASA \mid aB$$

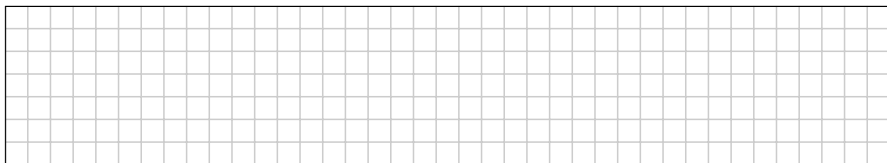
$$A \rightarrow B \mid S \mid CB$$

$$B \rightarrow b \mid \varepsilon$$

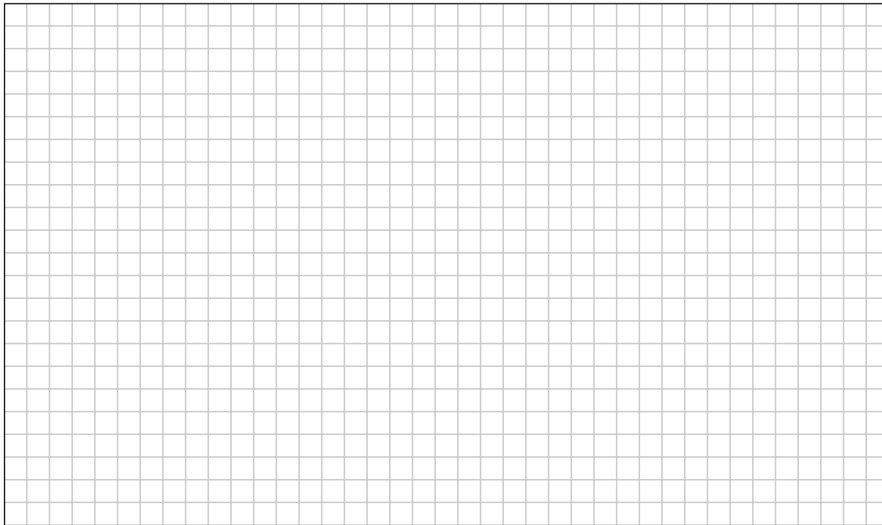
$$C \rightarrow aC$$

$$D \rightarrow aSCb \mid a$$

- (a) Beschreiben Sie in eigenen Worten, wann ein Nichtterminal *nützlich* in einer Grammatik ist.
- (b) Bilden Sie eine Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$, sodass alle Nichtterminale in G' *nützlich* sind. Nutzen Sie hierfür die Konstruktion aus Satz 4.35.



Aufgabe T8.1



Aufgabe T8.2

Sei G die CFG in CHOMSKY-Normalform mit Startzustand S und folgenden Produktionen:

$$S \rightarrow TS \mid CT \mid a$$

$$T \rightarrow AU \mid TT \mid c$$

$$U \rightarrow SB \mid AB$$

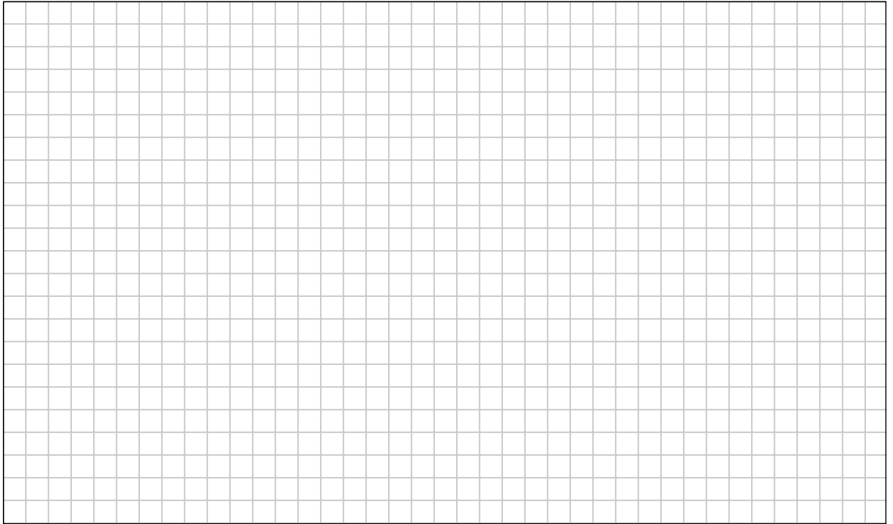
$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

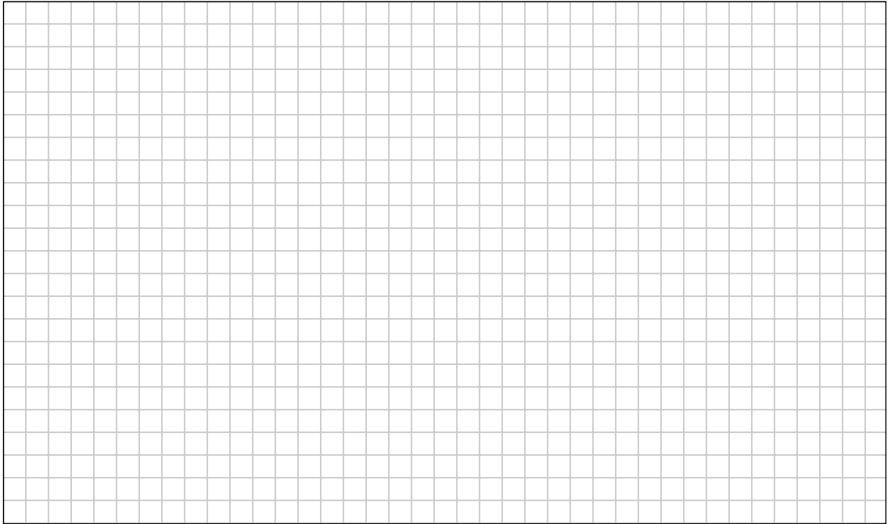
$$C \rightarrow c$$

- (a) Beschreiben Sie die Bedeutung der $F_{i,j}$ im CYK-Algorithmus in eigenen Worten.
- (b) Beschreiben Sie, wie man den Inhalt eines $F_{i,j}$ im CYK-Algorithmus berechnet.
- (c) Entscheiden Sie, ob $ccaab \in L(G)$ und $aabcc \in L(G)$. Nutzen Sie hierfür den CYK-Algorithmus aus Satz 4.43; geben Sie dabei die entsprechenden Tabellen an.
- (d) Erweitern Sie den CYK-Algorithmus so, dass für ein Wort w alle möglichen Syntaxbäume angegeben werden.
- (e) Bestimmen Sie mit Ihrem Algorithmus alle Syntaxbäume in G für das Wort $caab$.

Aufgabe T8.2



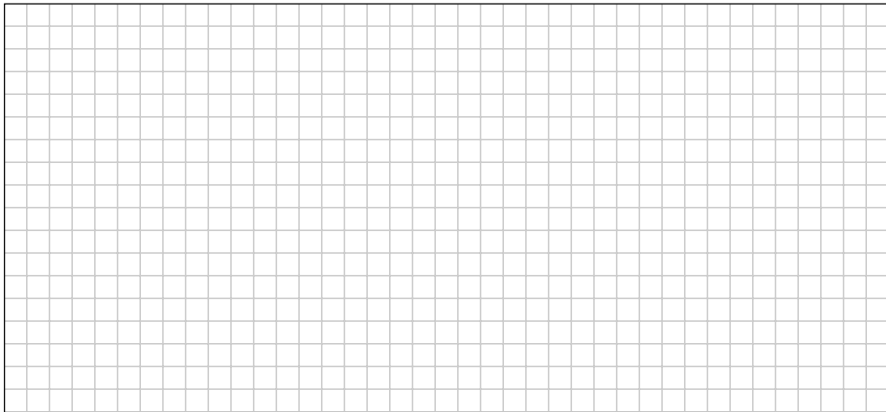
Aufgabe T8.2



Aufgabe T8.3

Hinweis: Dies ist eine Altklausuraufgabe – Retake 2022, Aufgabe 3d), 4 Punkte.

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine kontextfreie Sprache. Zeigen Sie, dass das Endlichkeitsproblem – d.h. ob $|L| < \infty$ gilt – entscheidbar ist.



Aufgaben T8.4 und T8.5

Diese Aufgaben sind optional und werden *nicht* in dieser Vorlage oder im Tutorium besprochen.

Aufgabe T8.4 ist eine Knobelaufgabe für schnelle Studis.

Aufgabe T8.5 übt den CYK-Algorithmus noch einmal.

Retake 2022 – Aufgabe 5a), 7 Punkte

Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ nennen wir $L^{\prec} := \{u \mid uv \in L \wedge u, v \in \Sigma^*\}$ die Sprache der *Präfixe* von L .

Geben Sie einen Algorithmus an, der zu einer kontextfreien Grammatik G eine kontextfreie Grammatik $G^{\prec}$ mit $L(G^{\prec}) = L(G)^{\prec}$ konstruiert.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass G in CHOMSKY-Normalform ist. $G^{\prec}$ muss jedoch nicht in CHOMSKY-Normalform sein und darf insbesondere ε -Produktionen enthalten.

