

Einführung in die Theoretische Informatik

Tutorium – Woche 9

Esther Ney

Sommersemester 2025

Zulip

Für die diesjährige THEO-Vorlesung wurden **inoffizielle** Streams auf der ZULIP-Instanz der TUM INFORMATIK erstellt. Dieser wird von den meisten Tutor*innen, aber nicht von PROF. ALBERS gelesen; wir versuchen natürlich trotzdem, organisatorische Fragen bei Bedarf weiterzuleiten. Man kann mich dort auch in Direktnachrichten anschreiben.

- Tutorin: ESTHER NEY
- Tutorien: Dienstag 16-18 (Di-16-2) und Donnerstag 16-18 (Do-16-1)
- E-Mail: esther.ney@tum.de
- Aufbau einer Tutorstunde: kurze Wiederholung wichtiger Definitionen und Lemmata, dann selbständiges Bearbeiten der Aufgaben
- Folien: auf ZULIP oder <https://reflect.moe/uni/theo25/>

Disclaimer

Hinweis

Diese Folien sind keine offizielle Musterlösung und dienen lediglich als zusätzliches Material für die Nachbereitung der Tutorien.

Tutorienlösungen können fehlerhaft sein.

Im Zweifel gilt immer das, was in den offiziellen Vorlesungsfolien und in der Musterlösung steht.

Urheberrechtlicher Hinweis

Die Folien sind nur für die Teilnehmer der entsprechenden Tutorien gedacht und dürfen nicht ohne die ausdrückliche Erlaubnis der Urheber vervielfältigt oder weitergegeben werden. Das Urheberrecht zu den Aufgaben liegt bei den Aufgabenerstellern.

Kellerautomaten für Kellerehusthiasten

Definitionen 4.44 und 4.59 – Kellerautomaten (PDAs)

Wir sagen, dass $M := (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ mit Zustandsmenge Q , Alphabet Σ , Kellularphabet Γ , Anfangszustand q_0 , unterstes Kellerzeichen Z_0 , Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma^*)$ und Endzuständen F ein *Kellerautomat* ist.

Wir sagen, dass M *deterministisch* bzw. ein *deterministischer Kellerautomat* (DPDA) ist, wenn $|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \varepsilon, Z)| \leq 1$ für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $Z \in \Gamma$ gilt.

Definition 4.47 – Akzeptanzbedingungen für Kellerautomaten

Wir unterscheiden bei der Sprache eines Automaten zwischen *Akzeptanz bei Endzuständen* und *Akzeptanz bei leerem Keller*.

Für Endzustände gilt $L_F(M) := \{w \mid \exists f \in F, \gamma \in \Gamma^*. (q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (f, \varepsilon, \gamma)\}$.

Für leeren Keller gilt $L_\varepsilon(M) := \{w \mid \exists q \in Q. (q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (q, \varepsilon, \varepsilon)\}$.

Mit Sätzen 3.49 und 3.50 sind beide Akzeptanzbedingungen gleich mächtig. Wenn wir festlegen, dass M mit leerem Keller akzeptiert, können wir die Endzustände weglassen: $M := (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$.

They are not the same

Satz 4.65 – DPDAs sind unter Komplement abgeschlossen

Sei M ein DPDA. Dann können wir einen DPDA \overline{M} mit $L(\overline{M}) = \overline{L(M)}$ konstruieren.

Beweisskizze: Konstruiere aus M einen DPDA, sodass es keine Konfiguration (q, a, Z) mit $\delta(q, a, Z) = \delta(q, \varepsilon, Z) = \emptyset$ gibt. Dann stelle sicher, dass wir nicht aus einer akzeptierenden Konfiguration in eine nicht-akzeptierende Konfiguration mit ε -Übergängen kommen können. Mehr Details in [Priese/Erk](#), Seite 148ff.

Korollar 4.66 – DPDAs sind weniger mächtig als PDAs

Es gibt einen PDA, aber keinen DPDA für $L := \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$, da \overline{L} mit Pumping-Lemma keine kontextfreie Sprache ist.

You know what is the same, though?

Sätze 4.53 und 4.56 – PDAs und CFGs sind äquivalent

Sei $G := (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG. Dann erhalten wir einen PDA M mit $L_\varepsilon(M) = L(G)$:

- (a) Bringe alle Produktionen von G in die Form $A \rightarrow bB_1 \dots B_k$ beziehungsweise $A \rightarrow B_1 \dots B_k$, indem neue Symbole A_a mit $A_a \rightarrow a$ hinzugefügt werden.
- (b) Definiere $M := (\{q\}, \Sigma, V, q, S, \delta)$ den PDA mit einem Zustand und Übergängen $A \rightarrow bB_1 \dots B_n \implies (q, B_1 \dots B_n) \in \delta(q, b, A)$, bzw. $A \rightarrow B_1 \dots B_n \implies (q, B_1 \dots B_n) \in \delta(q, \varepsilon, A)$.

Intuitiv simulieren wir die Übergänge mit dem Keller.

Sei $M := (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$ ein PDA, der mit leerem Keller akzeptiert. Dann erhalten wir eine CFG G mit $L(G) = L_\varepsilon(M)$:

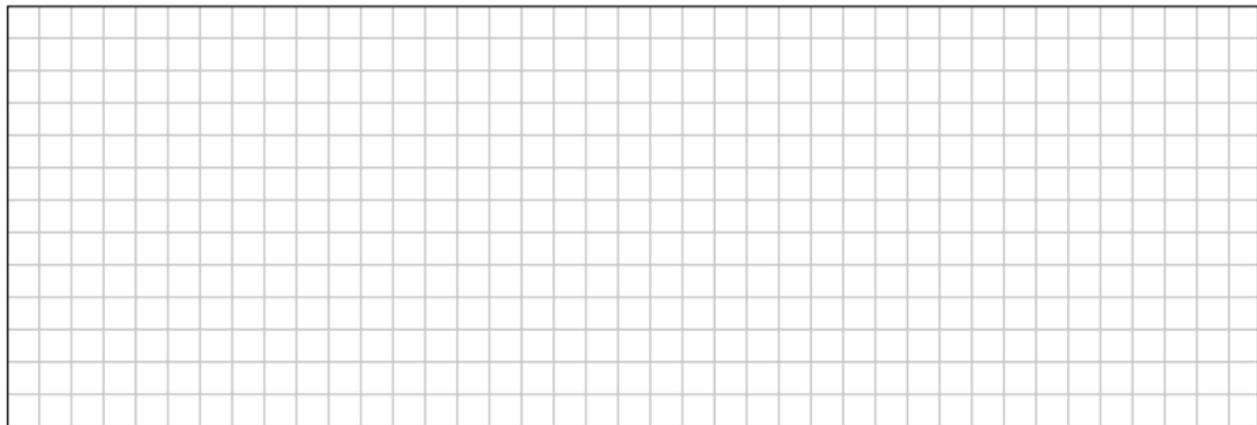
- (a) Definiere $G := (V, \Sigma, P, S)$ mit $V := (Q \times \Gamma \times Q) \cup \{S\}$.
- (b) Definiere $S \rightarrow [q_0, Z_0, q]$ für alle $q \in Q$, sowie für $(r_0, Z_1 \dots Z_k) \in \delta(q, b, Z)$ definiere für alle $r_1, \dots, r_k \in Q$: $[q, Z, r_k] \rightarrow b[r_0, Z_1, r_1] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k]$.

Intuitiv simulieren wir den Keller mit einem $[\dots]$ -Tupel.

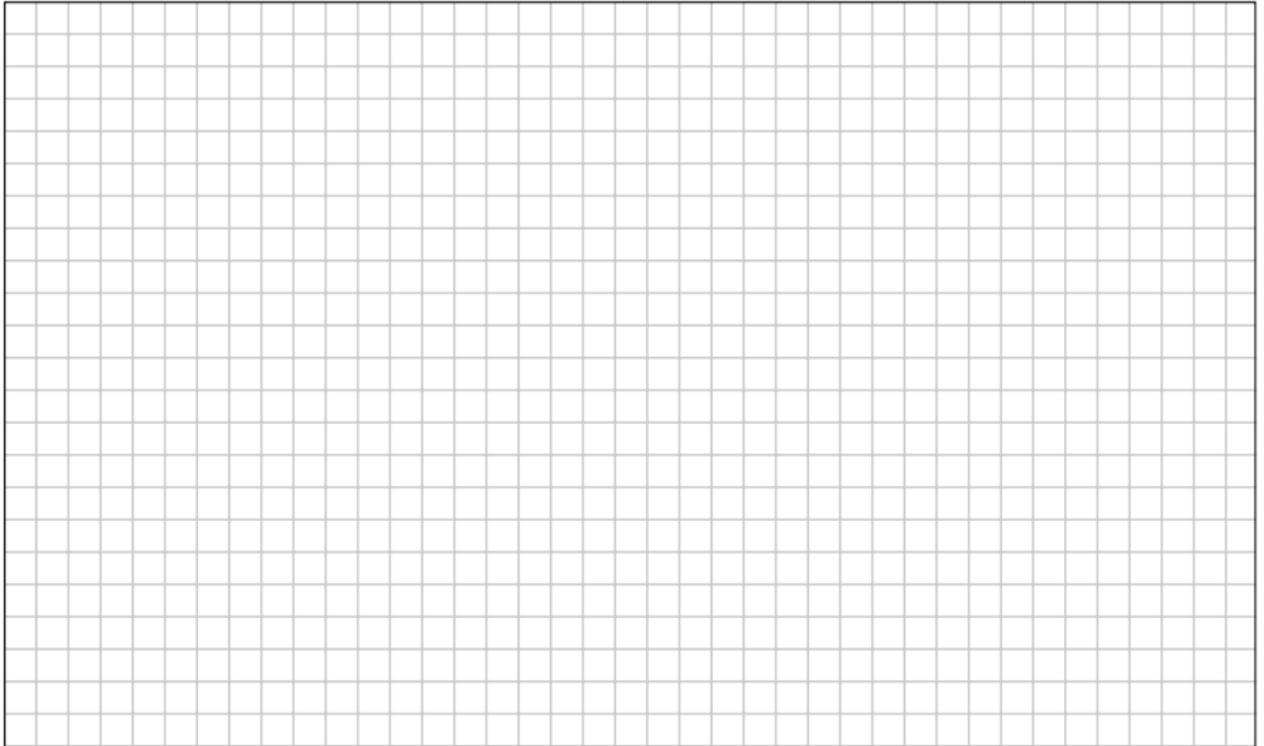
Aufgabe T9.1

Geben Sie jeweils einen Kellerautomaten M_i an, sodass $L_\varepsilon(M_i) = L_i$ gilt. Insbesondere soll M_i mit leerem Stack akzeptieren. Geben Sie zusätzlich für jeden M_i ein Wort $w \in \Sigma^+$ mit zugehörigem akzeptierendem Lauf an.

- (a) $L_1 := \{a^n b^{3n} \mid n \geq 0\}$
- (b) $L_2 := \{a^n b^m \in \{a, b\}^* \mid n \leq m \leq 2n\}$
- (c) $L_3 := \{w \in \{a, b\}^* \mid 2 \cdot |w|_a = 3 \cdot |w|_b\}$



Aufgabe T9.1



Aufgabe T9.2

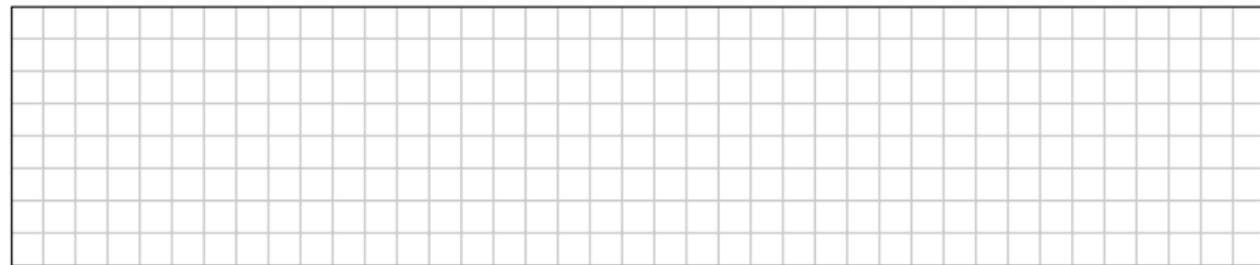
Zeigen Sie das Lemma 4.64 aus der Vorlesung:

Lemma 4.64 – Äquivalenz von L_F und L_ε über DPDA

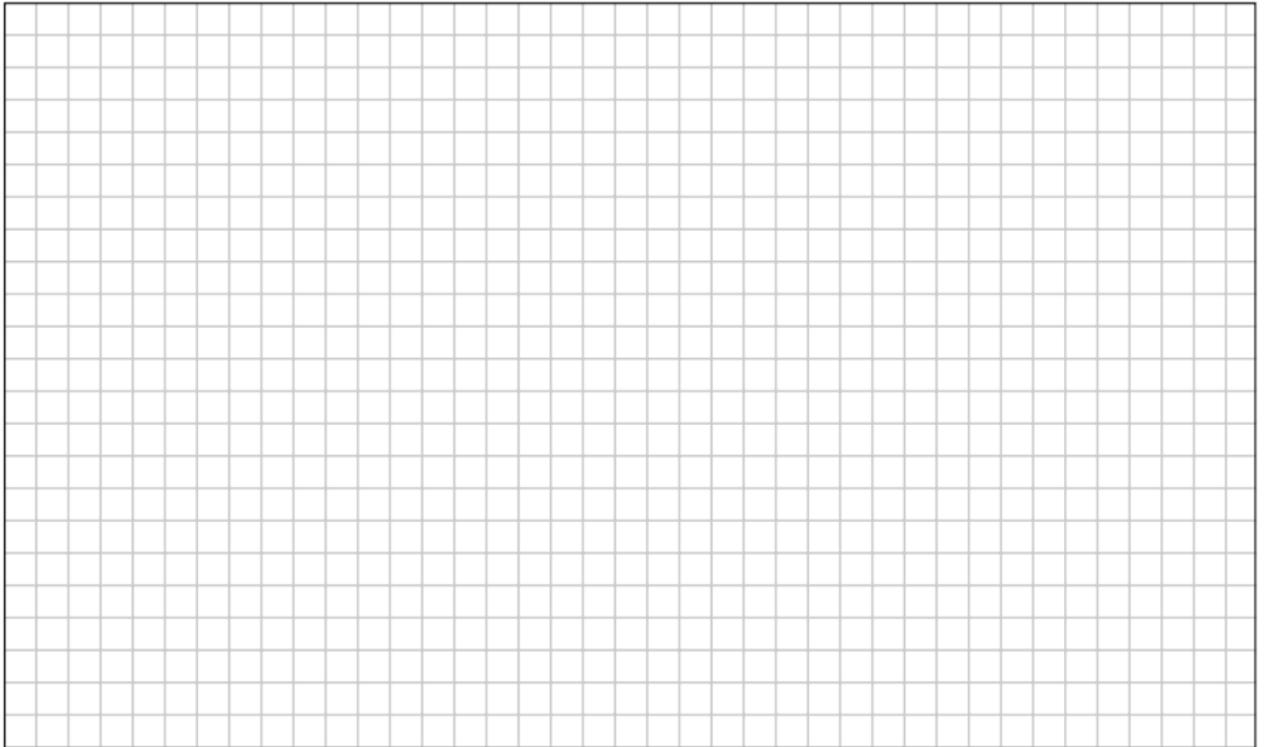
Folgende Aussagen sind für ein beliebiges $L \subseteq \Sigma^*$ äquivalent.

- (a) Es gibt einen DPDA M mit $L = L_\varepsilon(M)$.
- (b) Es gibt einen DPDA M mit $L = L_F(M)$. L erfüllt die Präfixbedingung:

$$w \in L, v \in \Sigma^+ \implies wv \notin L \quad (\text{Präfix-Bedingung})$$



Aufgabe T9.2



Aufgabe T9.3

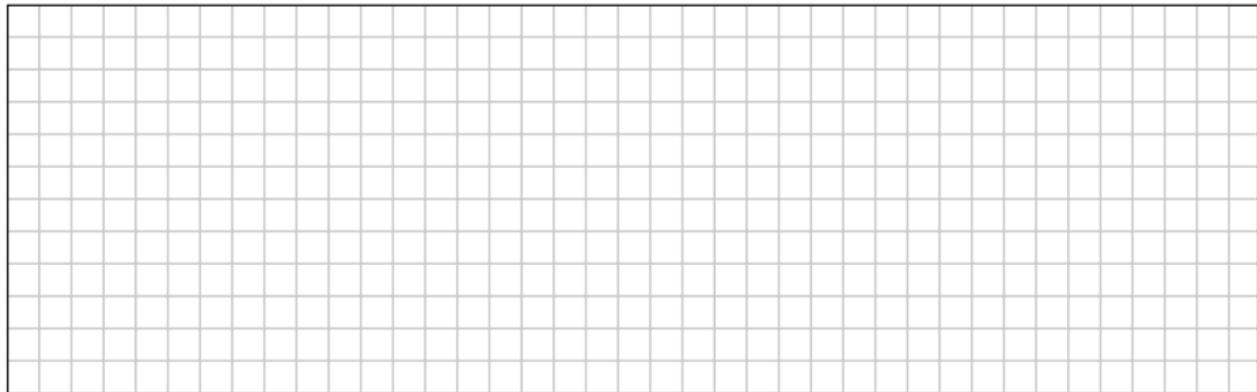
Sei G die CFG mit Startzustand S und folgenden Produktionen:

$$S \rightarrow ABa$$

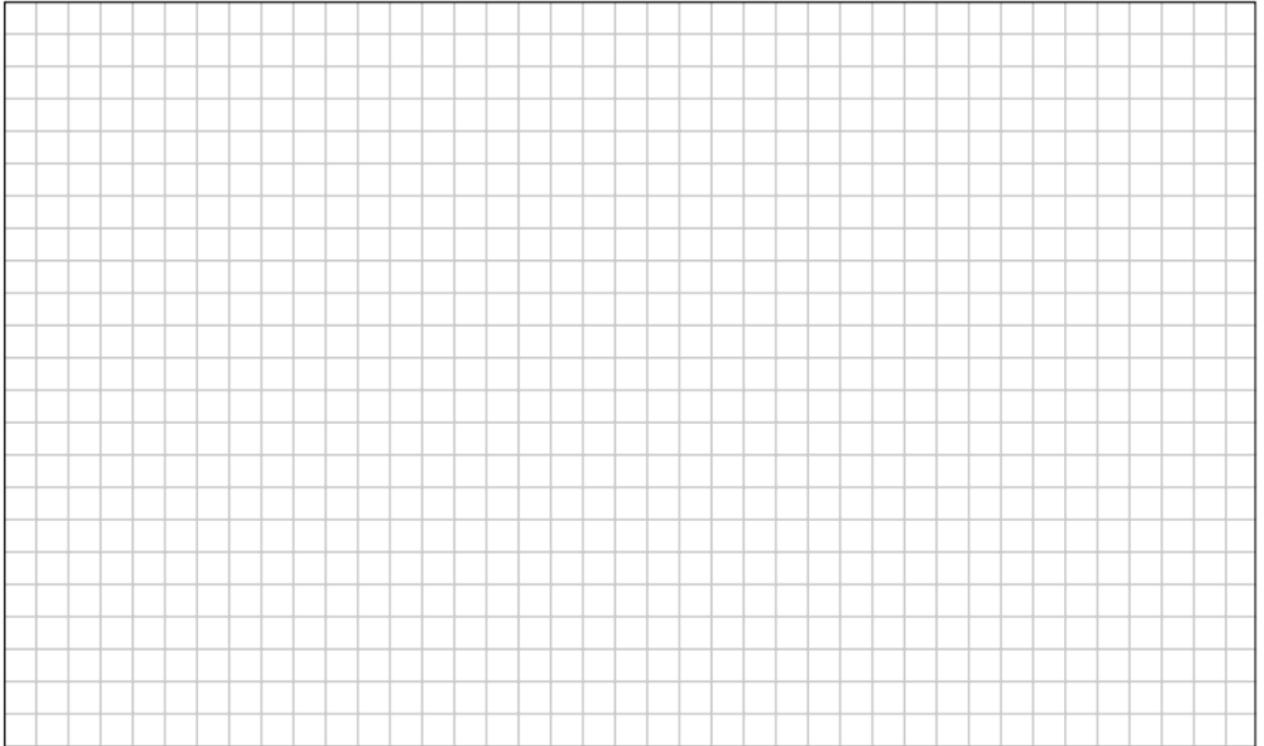
$$A \rightarrow Sa \mid Sb \mid a$$

$$B \rightarrow Bb \mid Sb \mid b$$

Geben Sie einen PDA M mit $L_\epsilon(M) = L(G)$ an. Nutzen Sie hierfür die Konstruktion aus Satz 4.53.



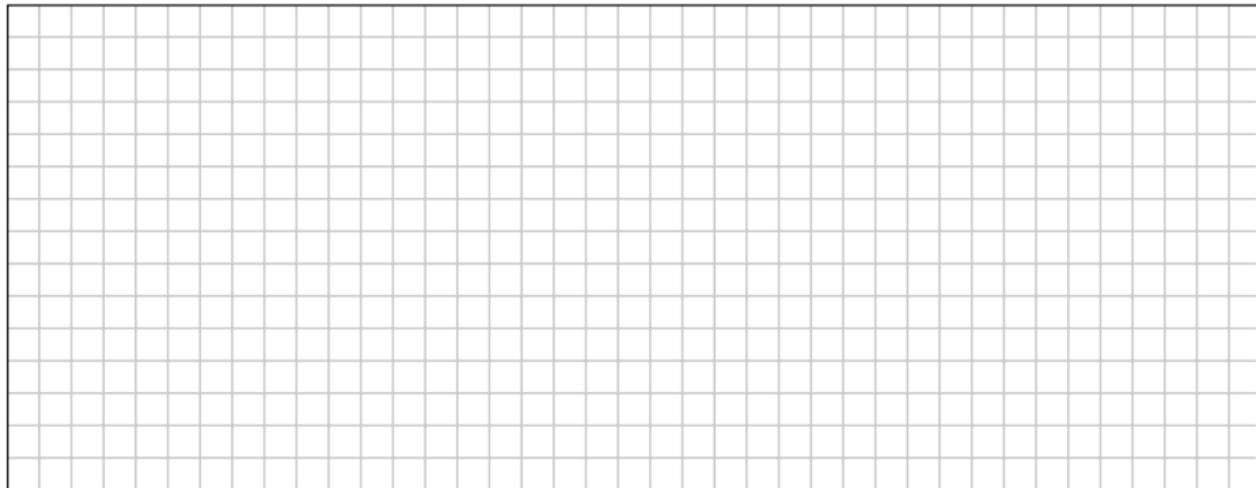
Aufgabe T9.3



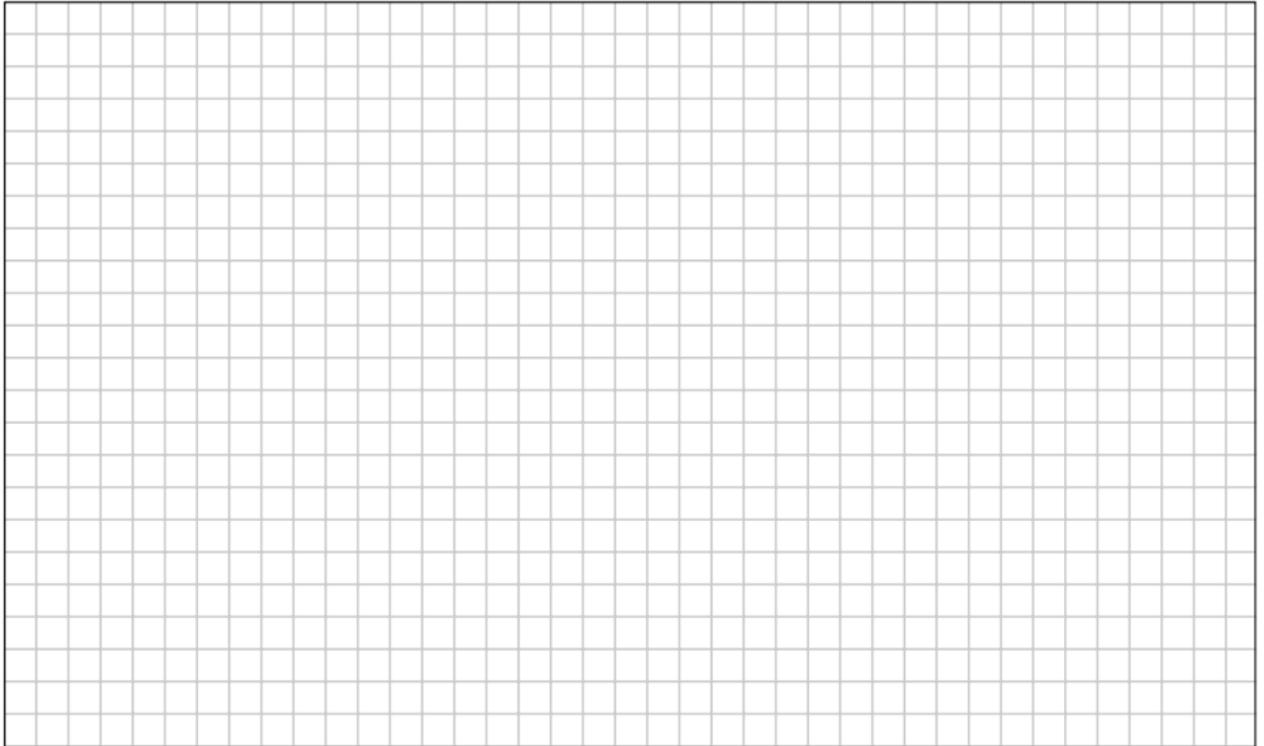
Aufgabe T9.4

Hinweis: Diese Aufgabe ist optional. Sie ist als kleine Knobelaufgabe gedacht und wird nicht besprochen.

Sei $L := \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b, c\}$. Wir wissen aus der Vorlesung, dass L nicht kontextfrei ist. Geben Sie einen PDA M mit $L(M) = \bar{L}$ an. Es ist Ihnen überlassen, ob M mit leerem Keller oder mit Endzuständen akzeptieren soll.



Aufgabe T9.4

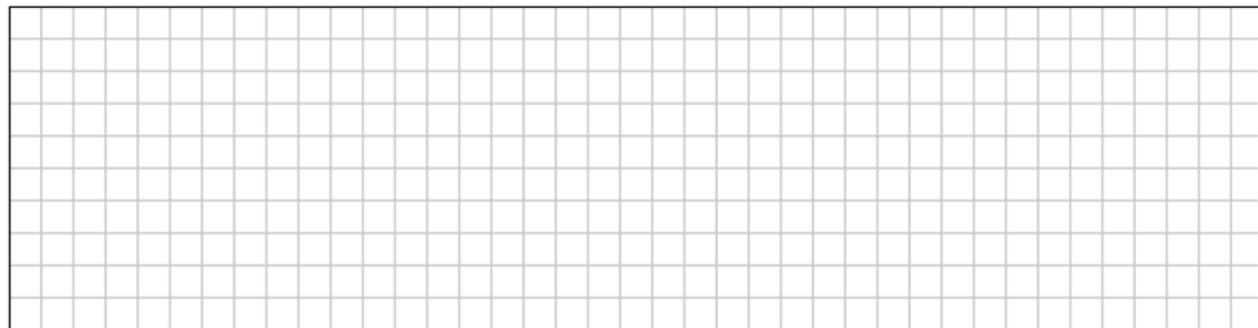


Retake 2023 – Aufgabe 5c), 7 Punkte

Sei $N \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und $K := (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ ein Kellerautomat mit $L_F(K) = N$, also die Sprache N mit Endzustand akzeptiert.

Sei $K' := (Q \cup \{q_{\text{neu}}\}, \Sigma, \Gamma \cup \{Z_{\text{neu}}\}, q_{\text{neu}}, Z_{\text{neu}}, \delta', \{q_{\text{neu}}\})$. Geben Sie ein δ' an, sodass $L_F(K') = L_F(K)^* = N^*$ mit Endzustand akzeptiert wird.

Tip: $\delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$ für $q \in Q, a \in \Sigma, Z \in \Gamma$.



Altklausuraufgabe

