Einführung in die Theoretische Informatik

Tutorium – Woche 9

Esther Ney

Sommersemester 2025

Organisatorisches

Zulip

Für die diesjährige Theo-Vorlesung wurden **inoffizielle** Streams auf der Zulip-Instanz der TUM Informatik erstellt. Dieser wird von den meisten Tutor*innen, aber nicht von Prof. Albers gelesen; wir versuchen natürlich trotzdem, organisatorische Fragen bei Bedarf weiterzuleiten. Man kann mich dort auch in Direktnachrichten anschreiben.

- Tutorin: Esther Ney
- Tutorien: Dienstag 16-18 (Di-16-2) und Donnerstag 16-18 (Do-16-1)
- E-Mail: `esther.ney@tum.de`
- Aufbau einer Tutorstunde: kurze Wiederholung wichtiger Definitionen und Lemmata, dann selbständiges Bearbeiten der Aufgaben
- Folien: auf Zulip oder `https://reflect.moe/uni/theo25/`

Disclaimer

Hinweis

Diese Folien sind keine offizielle Musterlösung und dienen lediglich als zusätzliches Material für die Nachbereitung der Tutorien.

Tutorienlösungen können fehlerhaft sein.

Im Zweifel gilt immer das, was in den offiziellen Vorlesungsfolien und in der Musterlösung steht.

Urheberrechtlicher Hinweis

Kellerautomaten für Kellerenthusiasten

Definitionen 4.44 und 4.59 – Kellerautomaten (PDAs)

Wir sagen, dass $M := (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ mit Zustandsmenge Q, Alphabet Σ, *Kelleralphabet* Γ, Anfangszustand q_0, *unterstes Kellerzeichen* Z_0, Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma^*)$ und Endzuständen F ein *Kellerautomat* ist.

Wir sagen, dass M *deterministisch* bzw. ein *deterministischer Kellerautomat* (DPDA) ist, wenn $|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \varepsilon, Z)| \leq 1$ für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $Z \in \Gamma$ gilt.

Definition 4.47 – Akzeptanzbedingungen für Kellerautomaten

Wir unterscheiden bei der Sprache eines Automaten zwischen *Akzeptanz bei Endzuständen* und *Akzeptanz bei leerem Keller*.

Für Endzustände gilt $L_F(M) := \{w \mid \exists f \in F, \gamma \in \Gamma^*.(q_0, w, Z_0) \to_M^* (f, \varepsilon, \gamma)\}$.
Für leeren Keller gilt $L_\varepsilon(M) := \{w \mid \exists q \in Q.(q_0, w, Z_0) \to_M^* (q, \varepsilon, \varepsilon)\}$.

Mit Sätzen 3.49 und 3.50 sind beide Akzeptanzbedingungen gleich mächtig. Wenn wir festlegen, dass M mit leerem Keller akzeptiert, können wir die Endzustände weglassen: $M := (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$.

They are not the same

Satz 4.65 – DPDAs sind unter Komplement abgeschlossen

Sei M ein DPDA. Dann können wir einen DPDA $\overline{M}$ mit $L(\overline{M}) = \overline{L(M)}$ konstruieren.

Beweisskizze: Konstruiere aus M einen DPDA, sodass es keine Konfiguration (q, a, Z) mit $\delta(q, a, Z) = \delta(q, \varepsilon, Z) = \varnothing$ gibt. Dann stelle sicher, dass wir nicht aus einer akzeptierenden Konfiguration in eine nicht-akzeptierende Konfiguration mit ε-Übergängen kommen können. Mehr Details in `Priese/Erk`, Seite 148ff.

Korollar 4.66 – DPDAs sind weniger mächtig als PDAs

Es gibt einen PDA, aber keinen DPDA für $L := \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$, da $\overline{L}$ mit Pumping-Lemma keine kontextfreie Sprache ist.

You know what is the same, though?

Sätze 4.53 und 4.56 – PDAs und CFGs sind äquivalent

Sei $G \coloneqq (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG. Dann erhalten wir einen PDA M mit $L_\varepsilon(M) = L(G)$:

(a) Bringe alle Produktionen von G in die Form $A \to bB_1 \dots B_k$ beziehungsweise $A \to B_1 \dots B_k$, indem neue Symbole A_a mit $A_a \to a$ hinzugefügt werden.

(b) Definiere $M \coloneqq (\{q\}, \Sigma, V, q, S, \delta)$ den PDA mit einem Zustand und Übergängen $A \to bB_1 \dots B_n \implies (q, B_1 \dots B_n) \in \delta(q, b, A)$, bzw. $A \to B_1 \dots B_n \implies (q, B_1 \dots B_n) \in \delta(q, \varepsilon, A)$.

Intuitiv simulieren wir die Übergänge mit dem Keller.

Sei $M \coloneqq (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$ ein PDA, der mit leerem Keller akzeptiert. Dann erhalten wir eine CFG G mit $L(G) = L_\varepsilon(M)$:

(a) Definiere $G \coloneqq (V, \Sigma, P, S)$ mit $V \coloneqq (Q \times \Gamma \times Q) \cup \{S\}$.

(b) Definiere $S \to [q_0, Z_0, q]$ für alle $q \in Q$, sowie für $(r_0, Z_1 \dots Z_k) \in \delta(q, b, Z)$ definiere für alle $r_1, \dots, r_k \in Q$: $[q, Z, r_k] \to b[r_0, Z_1, r_1] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k]$.

Intuitiv simulieren wir den Keller mit einem $[\dots]$−Tupel.

Aufgabe T 9.1

Geben Sie jeweils einen Kellerautomaten M_i an, sodass $L_\varepsilon(M_i) = L_i$ gilt. Insbesondere soll M_i mit leerem Stack akzeptieren. Geben Sie zusätzlich für jeden M_i ein Wort $w \in \Sigma^+$ mit zugehörigem akzeptierenden Lauf an.

(a) $L_1 := \{a^n b^{3n} \mid n \geq 0\}$

(b) $L_2 := \{a^n b^m \in \{a, b\}^* \mid n \leq m \leq 2n\}$

(c) $L_3 := \{w \in \{a, b\}^* \mid 2 \cdot |w|_a = 3 \cdot |w|_b\}$

Aufgabe T 9.1

Aufgabe T 9.2

Zeigen Sie das Lemma 4.64 aus der Vorlesung:

Lemma 4.64 – Äquivalenz von L_F und L_ε über DPDA

Folgende Aussagen sind für ein beliebiges $L \subseteq \Sigma^*$ äquivalent.

(a) Es gibt einen DPDA M mit $L = L_\varepsilon(M)$.

(b) Es gibt einen DPDA M mit $L = L_F(M)$. L erfüllt die Präfixbedingung:

$$w \in L, v \in \Sigma^+ \implies wv \notin L \qquad \text{(Präfix-Bedingung)}$$

Aufgabe T 9.2

Aufgabe T 9.3

Sei G die CFG mit Startzustand S und folgenden Produktionen:

$$S \to ABa$$
$$A \to Sa \mid Sb \mid a$$
$$B \to Bb \mid Sb \mid b$$

Geben Sie einen PDA M mit $L_\varepsilon(M) = L(G)$ an. Nutzen Sie hierfür die Konstruktion aus Satz 4.53.

Aufgabe T 9.3

Aufgabe T 9.4

Hinweis: Diese Aufgabe ist optional. Sie ist als kleine Knobelaufgabe gedacht und wird nicht besprochen.

Sei $L := \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b, c\}$. Wir wissen aus der Vorlesung, dass L nicht kontextfrei ist. Geben Sie einen PDA M mit $L(M) = \overline{L}$ an. Es ist Ihnen überlassen, ob M mit leerem Keller oder mit Endzuständen akzeptieren soll.

Aufgabe T 9.4

Altklausuraufgabe

Retake 2023 – Aufgabe 5c), 7 Punkte

Sei $N \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und $K := (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ ein Kellerautomat mit $L_F(K) = N$, also die Sprache N mit Endzustand akzeptiert.

Sei $K' := (Q \cup \{q_{\text{neu}}\}, \Sigma, \Gamma \cup \{Z_{\text{neu}}\}, q_{\text{neu}}, Z_{\text{neu}}, \delta', \{q_{\text{neu}}\})$. Geben Sie ein δ' an, sodass $L_F(K') = L_F(K)^* = N^*$ mit Endzustand akzeptiert wird.

Tipp: $\delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$ für $q \in Q, a \in \Sigma, Z \in \Gamma$.

Altklausuraufgabe