Einführung in die Theoretische Informatik

Tutorium – Woche 13

Esther Ney

Sommersemester 2025

Organisatorisches

Zulip

Für die diesjährige THEO-Vorlesung wurden **inoffizielle** Streams auf der ZULIP-Instanz der TUM INFORMATIK erstellt. Dieser wird von den meisten Tutor*innen, aber nicht von PROF. ALBERS gelesen; wir versuchen natürlich trotzdem, organisatorische Fragen bei Bedarf weiterzuleiten. Man kann mich dort auch in Direktnachrichten anschreiben.

- Tutorin: ESTHER NEY
- Tutorien: Dienstag 16-18 (Di-16-2) und Donnerstag 16-18 (Do-16-1)
- E-Mail: esther.ney@tum.de
- Aufbau einer Tutorstunde: kurze Wiederholung wichtiger Definitionen und Lemmata, dann selbständiges Bearbeiten der Aufgaben
- Folien: auf ZULIP oder https://reflect.moe/uni/theo25/

Disclaimer

Hinweis

Diese Folien sind keine offizielle Musterlösung und dienen lediglich als zusätzliches Material für die Nachbereitung der Tutorien.

Tutorienlösungen können fehlerhaft sein.

Im Zweifel gilt immer das, was in den offiziellen Vorlesungsfolien und in der Musterlösung steht.

Urheberrechtlicher Hinweis

To NP or not to NP

Definition 6.7 – Verifikator und Zertifikat

Wir sagen, dass M ein *Verifikator* für die Menge A ist, wenn $w \in A \iff \exists c. w\#c \in L(M)$. c nennen wir dann ein *Zertifikat* für das Wort w.

Üblicherweise interessieren uns nur *polynomiell beschränkte* Verifikatoren – also, dass ein Polynom p existiert, sodass $\texttt{time}_M(w\#c) \leq p(|w|)$. (*Hinweis:* `time` ist die Ausführzeit einer deterministischen TM).

Satz 6.10 – NP und Verifikator

Ein Problem A liegt in NP genau dann, wenn es einen polynomiell beschränkten Verifikator für A gibt.

Hinweis: Jedes Problem in P hat ebenfalls einen polynomiell beschränkten Verifikator, da $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$. In einer Klausuraufgabe "Zeigen Sie, dass $A \in \mathsf{NP}$" reicht es, einen polynomiell beschränkten Verifikator anzugeben.

Reduktion aber polynomiell

Definition 6.11 – polynomielle Reduktion

Wir sagen, dass eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ auf eine Menge $B \subseteq \Gamma^*$ *polynomielle reduzierbar* ist, falls es eine totale und von einer DTM in polynomieller Zeit berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt, sodass

$$w \in A \iff f(w) \in B \quad \texttt{für alle} \quad w \in \Sigma^*.$$

In diesem Fall schreiben wir auch $A \leq_p B$.

Die Komplexitätsklassen P und NP sind nach unten unter polynomieller Reduktion abgeschlossen: Gilt $B \in$ P und $A \leq_p B$, so gilt auch $A \in$ P; analog für NP.

Definitionen 6.14 und 6.15 – NP-hart und NP-vollständig

Wir sagen, dass eine Sprache A NP-*hart* ist, wenn $L \leq_p A$ für alle $L \in$ NP.

Wir sagen, dass eine Sprache A NP-*vollständig* ist, wenn $A \in$ NP und A NP-hart ist.

Ist A NP-hart und $A \leq_p B$, so ist auch B NP-hart.

Einige Probleme in NP

SAT, 3KNF-SAT und 2KNF-SAT

Das Problem SAT – *Input:* aussagenlogische Formel F, Output: Erfüllbarkeit von F – ist NP-vollständig.

Das Problem 3KNF-SAT – *Input:* aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform, sodass jede Klausel höchstens 3 Literale enthält, Output: Erfüllbarkeit von F – ist NP-vollständig, da SAT $\leq_p$ 3KNF-SAT.

Das Problem 2KNF-SAT – *Input:* aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform, sodass jede Klausel höchstens 2 Literale enthält, Output: Erfüllbarkeit von F – liegt in P.

Ein paar mehr Probleme

COL – *Input:* ungerichteter Graph und eine Zahl k, *Output:* Gibt es eine k-Färbung des Graphen? In P für $k = 2$; NP-vollständig sonst.

MENGENÜBERDECKUNG – *Input:* Teilmengen T_i einer endlichen Menge M und eine Zahl k, *Output:* Gibt es $T_{j_1}, \ldots, T_{j_k}$ mit $\cup T_j = M$? NP-vollständig.

CLIQUE – *Input:* ungerichteter Graph und eine Zahl k, *Output:* Gibt es eine k-Clique des Graphen, also einen vollständigen Teilgraphen mit $|V| = k$? NP-vollständig.

RUCKSACK – *Input:* Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$ und eine Zahl k, *Output:* Gibt es $a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}$ mit $\sum a_j = b$? NP-vollständig.

TSP – *Input:* Eine $n \times n$-Matrix $M_{ij} \in \mathbb{N}$ von "Entfernungen" und eine Zahl k, *Output:* Gibt es einen Hamilton-Kreis der Länge $\leq k$? NP-vollständig.

BIN PACKING – *Input:* Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, Behälterkapazität $b \in \mathbb{N}$ und Behälteranzahl k, *Output:* Gibt es eine Verteilung der a_i, sodass kein Behälter überläuft? NP-vollständig.

PARTITION – *Input:* Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, *Output:* Gibt es eine Menge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \notin I} a_j$? NP-vollständig.

Aufgabe T 13.1

Betrachten Sie das Problem STUNDENPLAN:

Input: Endliche Mengen S (Studierende), V (Vorlesungen), T (Termine), eine Relation $R \subseteq S \times V$ (“Student*in möchte die Vorlesung besuchen”).

Output: Ja oder Nein – gibt es eine Abbildung $f : V \to T$, sodass alle Studierenden einen überschneidungsfreien Stundenplan haben? Formal:

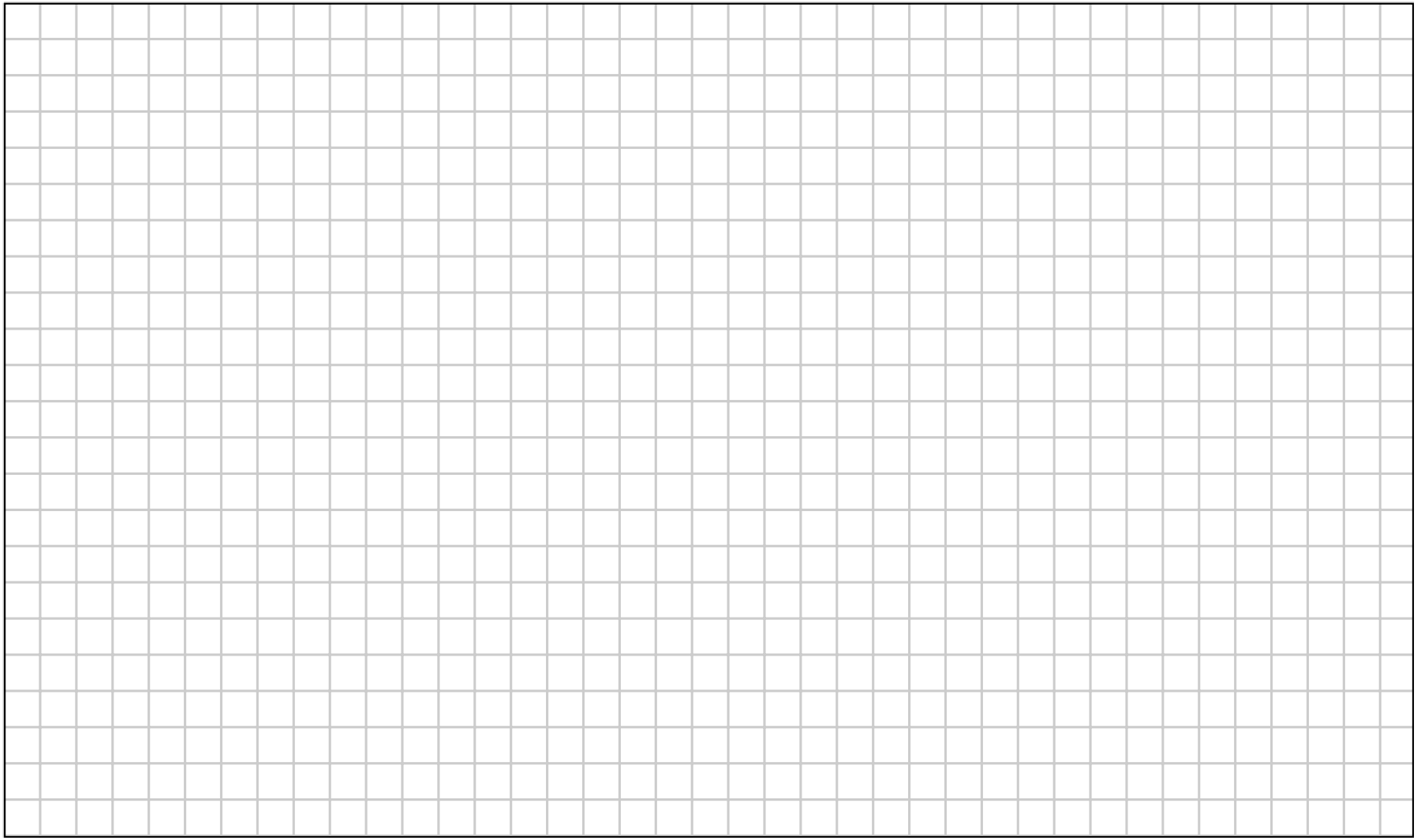
$$\exists f : (s, v_1) \in R \land (s, v_2) \in R \land v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2) \qquad \text{(STUNDENPLAN)}$$

(a) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN $\in$ NP.

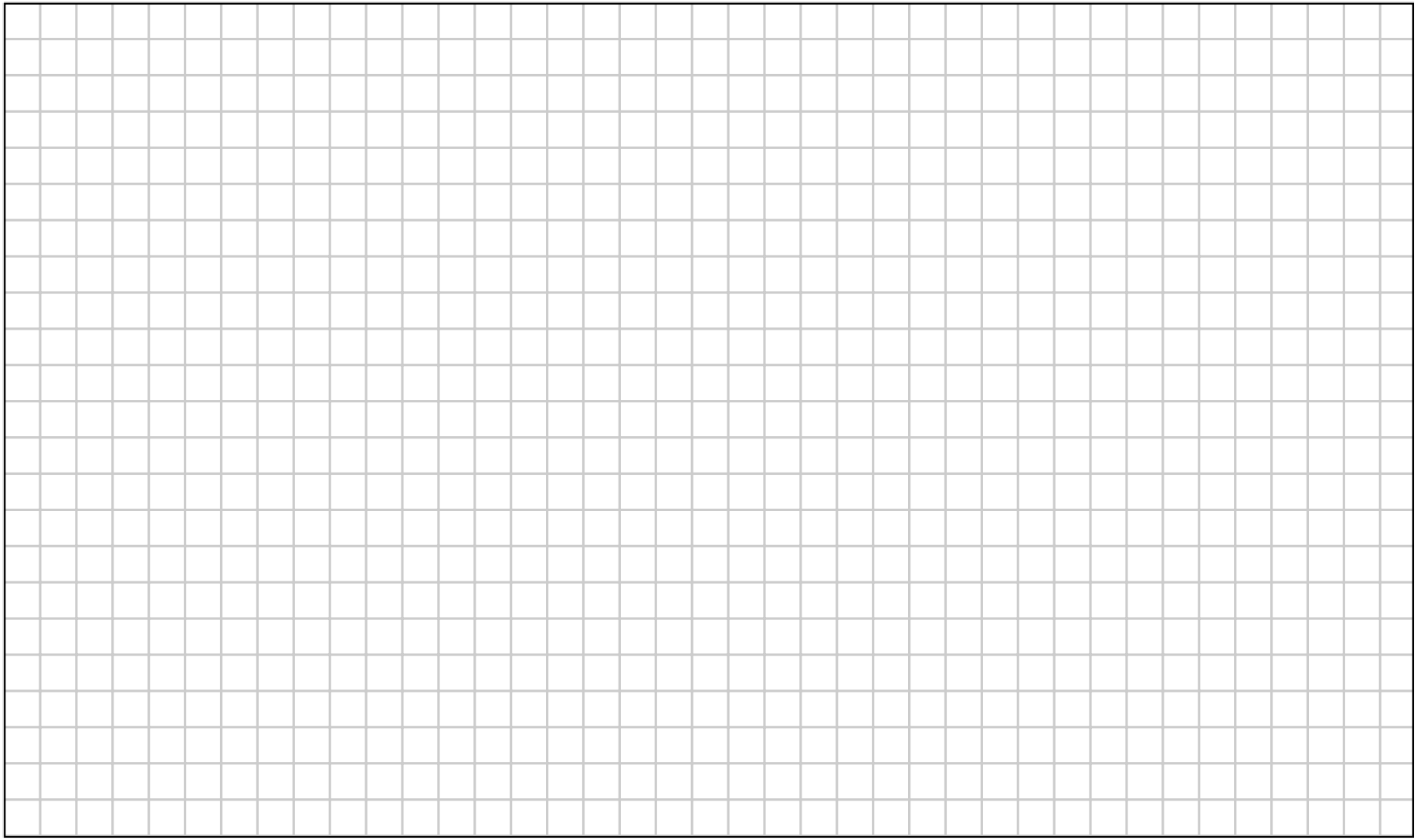
(b) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN ein NP-vollständiges Problem ist, indem Sie 3COL $\leq_p$ STUNDENPLAN zeigen. Zeigen Sie insbesondere die Korrektheit Ihrer Reduktion.

Hinweis: 3COL ist das Problem, dass ein Graph mit 3 Farben so färbbar ist, dass benachbarte Knoten unterschieldiche Farben haben – *Input:* Eine Menge (V, E), *Output:* Eine Funktion $f : V \to \{0, 1, 2\}$, sodass $\{v_1, v_2\} \in E \implies f(v_1) \neq f(v_2)$.

Aufgabe T 13.1



Aufgabe T 13.1



Aufgabe T 13.2

Betrachten Sie das Problem ZOLP (“zero-one linear programming”):

Input: Ein System von linearen Ungleichungen

$$b_1 \leq a_{1,1}y_1 + \cdots + a_{1,n}y_n \tag{1}$$

$$\vdots \tag{2}$$

$$b_k \leq a_{k,1}y_1 + \cdots + a_{k,n}y_n \tag{3}$$

mit $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Z}$, $m, n > 0$.

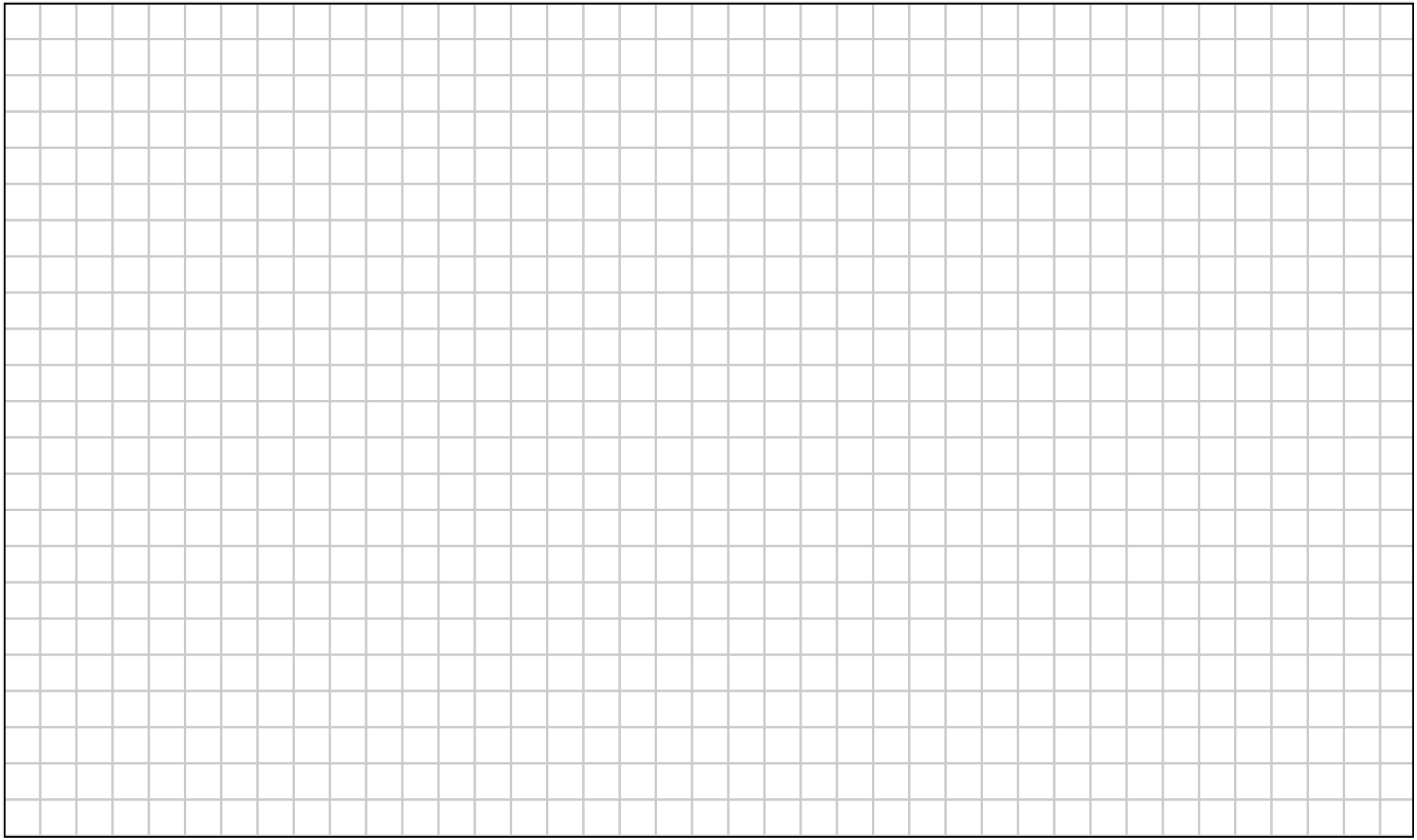
Output: Ja oder Nein – gibt es eine Abbildung $f : y_i \to \{0, 1\}$, sodass alle Ungleichungen erfüllt sind?

(a) Zeigen Sie, dass ZOLP ein NP-hartes Problem ist, indem Sie 3KNF-SAT $\leq_p$ ZOLP zeigen. Sie müssen die Korrektheit Ihrer Reduktion *nicht* zeigen.

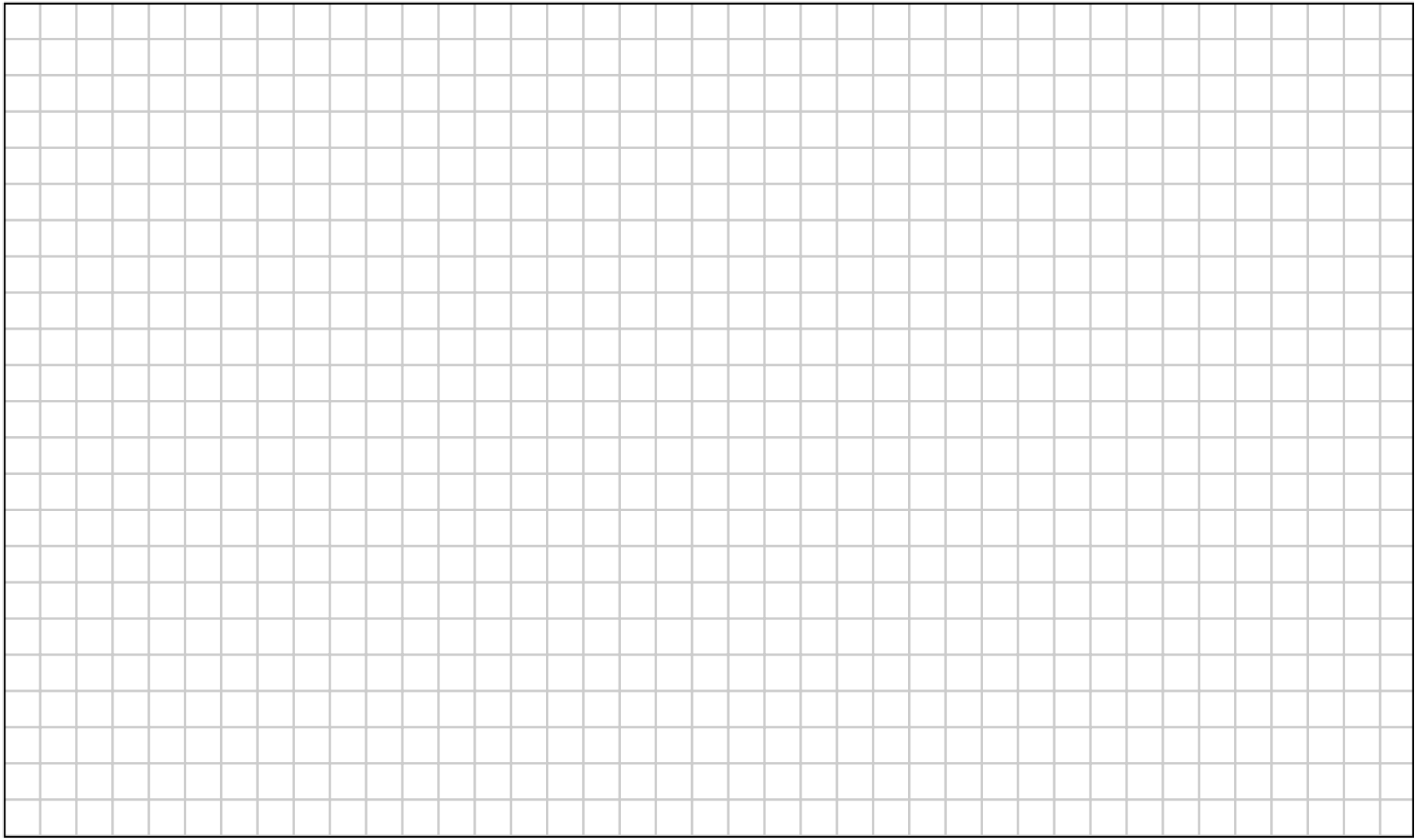
(b) Wenden Sie ihre Reduktion auf folgende Formel an:

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$

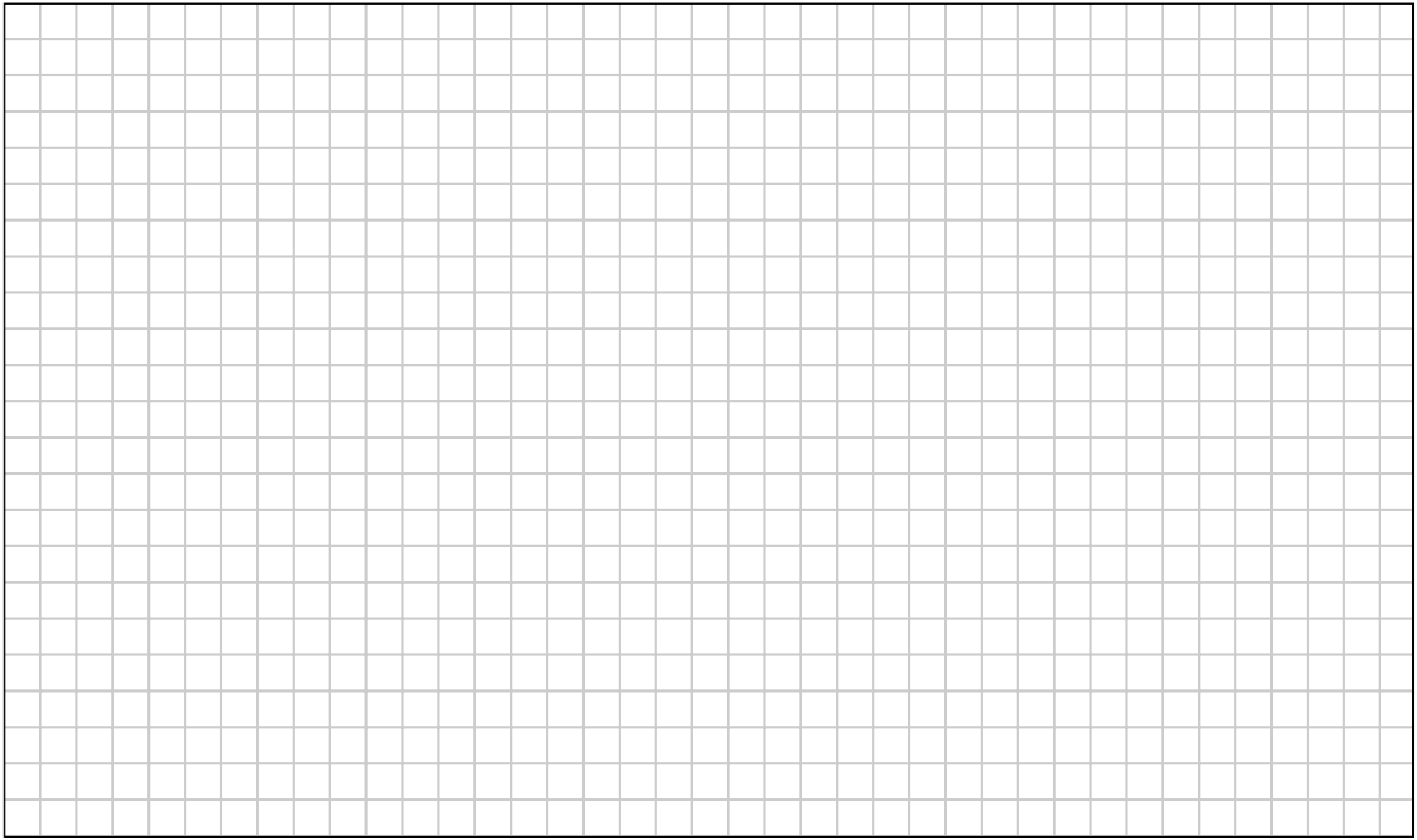
Aufgabe T 13.2



Aufgabe T 13.2



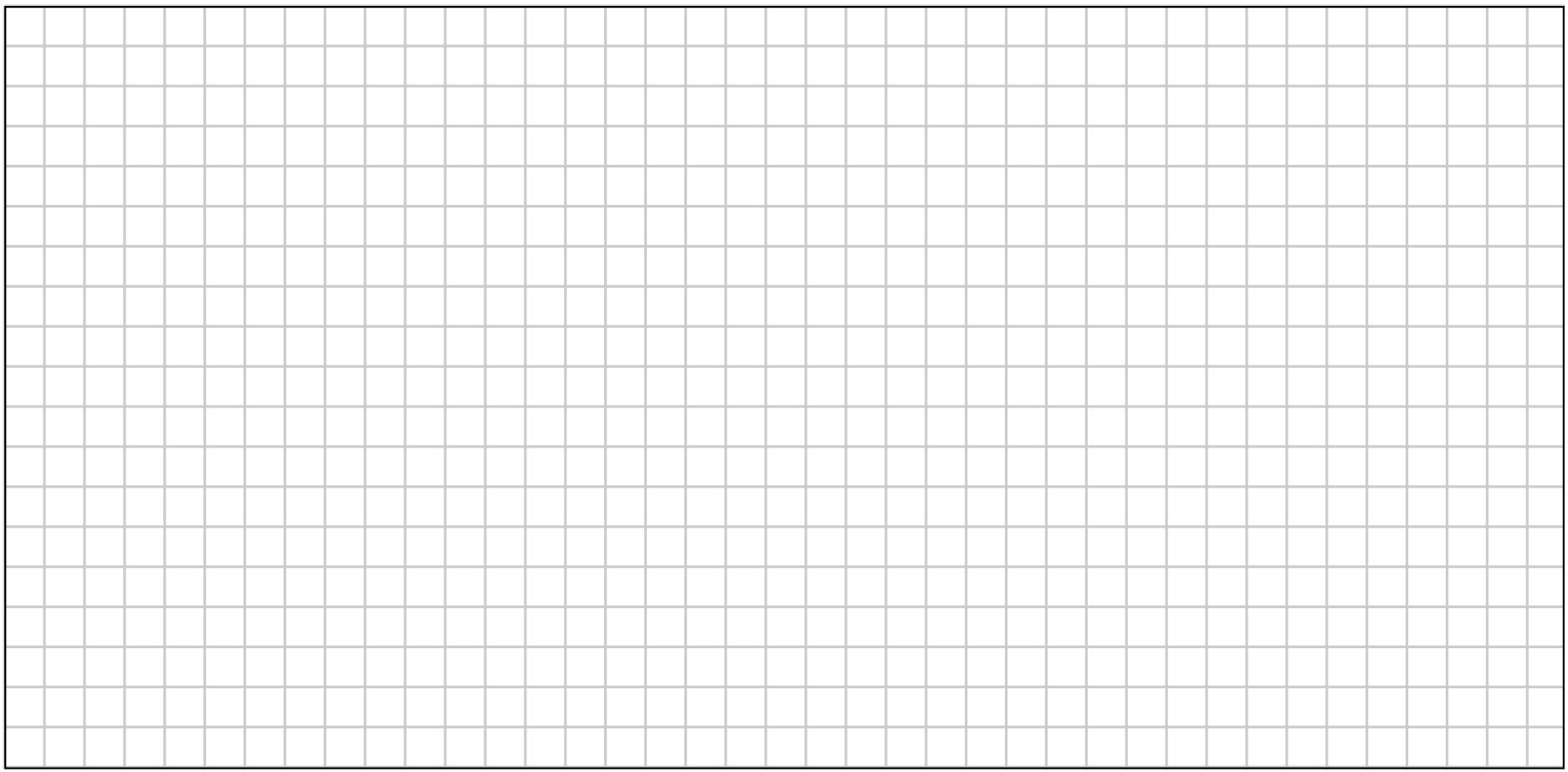
Aufgabe T 13.2



Aufgabe T 13.3

Zeigen Sie, dass $\leq_p$ eine *transitive* Relation ist, also dass gilt:

$$A \leq_p B \wedge B \leq_p C \implies A \leq_p C \qquad \text{(Transitivität)}$$



Altklausuraufgabe

Quiz über Klausuren hinweg

Entscheiden Sie ohne Beweis (a-e), ob die Aussagen stimmen:

(a) Sei $L \in$ P. Dann gilt $\overline{L} \in$ NP.

(b) Jede kontextfreie Sprache ist in NP.

(c) Sei $A \in$ NP und B NP-vollständig. Dann gilt $B \leq_p A$.

(d) Sei $L \subseteq \Sigma^*\{\#\}\Sigma^*$ eine Sprache, sodass $L \in$ P.
Dann ist $\{u \mid \exists v \in \Sigma^* : u\#v \in L\}$ in NP.

(e) Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ Sprachen mit $A \leq_p$ SAT $\leq_p B$. Welche Aussagen sind wahr?
i. $A \in$ NP, ii. $B \in$ NP, iii. B ist NP-hart, iv. $A \leq_p B$

(f) Sei $L \in$ NP. Zeigen oder widerlegen Sie: $L^* \in$ NP.